Primer Parcial de Análisis Matemático II

Fecha: 23/10/2024 Apellido y Nombre:

Curso: Z2674 Legajo:

1. Halle los puntos de la superficie $x^2 - y^2 - z^2 = -16$ en el cual el plano tangente a la superficie en dichos puntos es paralelo al plano $x + 2y + z = 5$

---

2. Determine el valor de derivada direccional máxima en $(1; 1)$ de la función compuesta $z = h(x; y) = (f \circ \bar{g})_{(x;y)}$ si $\bar{g}(x; y) = (xy; xy^2 - 2)$ donde el plano tangente a la gráfica de la función $z = f(u; v)$ en el punto $(1; -1; f(1; -1))$ es paralelo al plano $2x + y + 2z = 0$

---

3. Analice continuidad y derivabilidad en el origen para $f(x; y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x+y} & si\ x + y \neq 0 \\ 0 & si\ x + y = 0 \end{cases}$

---

4. Determine si exciten extremos relativos y absolutos para la función

$f(x; y) = x + xy^2$ en su dominio natural

1. a)Defina : superficie; y superficie regular en un punto de la misma b) Verifique si $(x; y; z) = (u^2; u + v; v^2 - u)$ es una superficie regular en $\bar{A} = (1; 2; 0)$

---

2. Indique propiedades del vector gradiente para $z = f(x; y)$ en un punto $\bar{A}$ de su dominio (indique hipótesis en cada caso)

AM 2 | 1º parcial | Prof. Hernández | HOJA Nº 1 | FECHA 23-10-24

① Hallar los puntos de la sup. $x^2-y^2-z^2=-16$ en el cual el plano tangente a la sup. en dichos puntos es paralelo al plano $x+2y+z=5$

$S: x^2-y^2-z^2=-16$
PT_S: plano tangente a S

$N_S \parallel N_{PTS} \Rightarrow N_S = k\, N_{PTS}$
tomo $k=1$

$N_S = (2x,-2y,-2z) \Rightarrow \boxed{(2x,-2y,-2z) = N_{PTS}}$

$T: x+2y+z=5 \quad T \parallel PTS \Rightarrow N_T \parallel N_{PTS}$

$N_T = (1,2,1) \qquad N_{PTS} = k\, N_T$

$(2x,-2y,-2z) = k(1,2,1)$

$$\begin{cases} 2x = k \\ -2y = 2k \\ -2z = k \end{cases}$$

$2x = -2z \rightarrow \boxed{x=-z}$

$-2y = 2k \rightarrow -y = k = -2z$

$\boxed{y = 2z}$

$S: x^2-y^2-z^2=-16$
$(-z)^2-(2z)^2-z^2=-16$
$\cancel{z^2} - 4z^2 - \cancel{z^2} = -16 \rightarrow 4z^2=16 \rightarrow \underbrace{z^2=4}_{|z|=2}$

$z=2 \rightarrow x=-2$
$\quad\rightarrow y=4$

$\boxed{P_1=(-2,4,2)}$

$z=-2 \rightarrow x=2$
$\quad\rightarrow y=-4$

$\boxed{P_2=(2,-4,-2)}$

NOTA

② Determinar el valor de la derivada direccional máxima en $(1;1)$ de la función compuesta $z = h(x,y) = (f \circ \bar{g})(x,y)$ si $\bar{g}(x,y) = (xy, xy^2 - 2)$ donde el plano tangente a la gráfica de la función $z = f(u,v)$ en el punto $(1;-1, f(1,-1))$ es paralelo al plano $2x + y + 2z = 0$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{r}}(1,1)\Big|_{max} = \|\nabla h_{(1,1)}\|$$

$$h(x,y) = f(\bar{g}(x,y)) \longrightarrow Dh(x,y) = Df(\bar{g}(x,y))\, D\bar{g}(x,y)$$

$$Dh(1,1) = Df(\bar{g}(1,1)) \cdot D\bar{g}(1,1)$$

$$\bar{g}(x,y) = (xy, xy^2 - 2)$$

$$\hookrightarrow \bar{g}(1,1) = (1,-1)$$

$$D\bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix} \rightarrow D\bar{g}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= Df(1,-1) \cdot D\bar{g}(1,1) =$$

$$= Df(1,-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h'_x & h'_y \end{bmatrix}$$

Hallo $Df(1,-1)$

$$\underbrace{\text{Pl. tangente a } F(1,-1)}_{(f'_x(1,-1),\ f'_y(1,-1),\ -1)} \ // \ \underbrace{2x + y + 2z = 0}_{\vec{N} = (2,1,2)}$$

$$(f'_x(1,-1),\ f'_y(1,-1),\ -1) = k\,(2,1,2)$$

$$\begin{cases} f'_x(1,-1) = 2k \\ f'_y(1,-1) = k \\ -1 = 2k \rightarrow k = -1/2 \end{cases} \qquad f'_x(1,-1) = -1 \qquad f'_y(1,-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \vec{r}}(1,1)\Big|_{max} = \|\nabla h_{(1,1)}\| = \left\|\left(-\frac{3}{2}, -2\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = \boxed{\frac{\partial h}{\partial \vec{r}}(1,1)\Big|_{max} = \frac{5}{2}}$$

AM2	1° parcial	Prof. Hernández	HOJA N° 1 / FECHA 23-10-24

③ Analizar la continuidad y derivabilidad en el origen para

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x+y} & si\ x+y \neq 0 \\ 0 & si\ x+y = 0 \end{cases}$$

Continuidad

- $f(0,0) = 0$
- $¿\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)?$ $\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y) \overset{*}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$ — si $(x,y) \in x+y=0$

si $(x,y) \in x+y \neq 0$: $\circledast = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x+y} = \xrightarrow{si\ x=0} 0$

$\boxed{si\ y = x^3 - x}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x+x^3-x} = 1$ $\neq \Rightarrow \nexists \lim$

$\boxed{f \text{ no es cont en } (0,0)}$

Derivabilidad $\check{v} = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$f'((0,0),\check{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\check{v}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \circledast$$

$\boxed{si\ a+b=0} \to \circledast = \lim_{h\to 0} \dfrac{0}{h} = 0 \to \boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0\ si\ a+b=0}$

$\boxed{si\ a+b\neq 0}$ $\circledast = \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\cancel{h}} \cdot \dfrac{h^{\cancel{3}\,2} a^3}{ha+hb} = \lim_{h\to 0} \dfrac{h^2 a^3}{h(a+b)} = 0$

$\boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0\ si\ a+b\neq 0}$

$\boxed{f'((0,0),\check{v}) = 0 \quad \forall \check{v} \in \mathbb{R}^2}$ $\to$ $\boxed{f \text{ es derivable en } (0,0)}$

---

④ Determinar si existen extremos relativos y absolutos de $f(x,y) = x + xy^2$ en su dominio natural

$dom(f) = \mathbb{R}^2$

Hallo PC: $(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \nabla f_{(x,y)} = (0,0)$

$f'_x = 1 + y^2 = 0 \to y^2 = -1 \to \nexists\ y \in \mathbb{R} / y^2 = -1 \to$ No hay PC

$f'_y = 2xy = 0$

$\boxed{\text{No hay extremos relativos ni absolutos}}$

NOTA

1 a) Definir: superficie y sup. regular en un punto de la misma

Superficie: entidad geométrica bidimensional

Sup. regular en un punto: $\bar{A} \in$ gráfica de F_S

$\bar{A}$ es punto regular de S: $\bar{\sigma}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$

si $\sigma'_x \times \sigma'_y \neq \bar{0}$

b) Verificar si $(x,y,z) = (u^2; u+v; v^2-u)$ es una superficie regular en $\bar{A} = (1,2,0)$

$\bar{\sigma}(u,v) = (u^2; u+v; v^2-u) \longrightarrow \bar{\sigma}'_u = (2u, 1, -1)$

$\bar{\sigma}'_v = (0, 1, 2v)$

$(1,2,0) = u^2, u+v, v^2-u)$

$\begin{cases} 1 = u^2 \longrightarrow |u| = 1 \begin{cases} u=1 \\ u=-1 \end{cases} \\ 2 = u+v \quad \text{si } u=1 \rightarrow v=1 \quad\quad \text{si } u=-1 \rightarrow v=3 \\ 0 = v^2-u \rightarrow v^2-u = 1-1=0 ✓ \quad\quad \rightarrow 3^2+1 = 4 \neq 0 \end{cases}$

$\boxed{u = 1 = v}$

$\bar{\sigma}'_u(1,1) = (2,1,-1)$

$\bar{\sigma}'_v(1,1) = (0,1,2)$

$\Big\} N = (3,-2,2) \neq (0,0,0)$

$\boxed{\bar{A} \text{ es punto regular}}$

---

2 Indicar propiedades del vector gradiente para $z = f(x,y)$ en un punto $\bar{A}$ de su dominio

El gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función

El módulo del gradiente es la tasa de cambio en la dirección del gradiente

El gradiente en $\bar{A}$ es perpendicular al conjunto de nivel de f en A

NOTA